

Varianta 033

Subiectul I:

a) $AB = 2$;

b) Fie P mijlocul segmentului EF; am $x_p = \frac{1}{2}, y_p = \frac{5}{2}$;

c) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{8}{9}$ și cum $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin x > 0$, deci $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

d) $\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9} = 1$;

e) $z = \frac{3+5i}{5-3i} = i \Rightarrow \operatorname{Im} z = 1$;

f) $i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$;

Subiectul II:

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22$;

b) ecuația este $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 2$;

c) În 5!=120 moduri;

d) Se obține $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$;

e) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

2.

a) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -\frac{3}{50}$;

c) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0, (\forall)x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$;

d) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \arctg x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2007}{n^2 f(n)} = 2007$

Subiectul III :

a) $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$; $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;

b) Dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}, y = a' + b'\sqrt{2}$ cu $a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$ și am : $x + y = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$

- c) $x \cdot y = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$
- d) Fie $z = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $\frac{1}{z} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $z \in M$
- e) Exemplu : $z = \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, dar $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $z \notin M$
- f) Fie $x, y \in M \Rightarrow x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$; am $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ (am aplicat c))
- g) Din d) am că $3 - 2\sqrt{2} \in M$ și cum $x, y \in M, (\forall) x, y \in M \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})^n \in M, (\forall) n \in \mathbf{N}$; Pe de altă parte $3 - 2\sqrt{2}$ e subunitar și evident pot găsi o infinitate de numere naturale n astfel încât $(3 - 2\sqrt{2})^n < \frac{1}{2007}$.

Subiectul IV :

- a) $f_1(x) = f_0'(x) = 3e^{3x}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $-\infty$;
- c) $f_0(x) = 3^0 e^{3x}$ da. Presupun că $f_n(x) = 3^n e^{3x}$ și am $f_{n+1}(x) = f_n'(x) = (3^n e^{3x})' = 3^{n+1} e^{3x}$.
Deci $f_n(x) = 3^n e^{3x}, (\forall) x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
- d) Suma cerută este $\sum_{k=0}^n f_k(0) = \sum_{k=0}^n 3^k \cdot e^{3 \cdot 0} = \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$;
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f_k(0)}{f_{n+1}(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{3^n - 1}{2}}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3^{n+1}} \right] = \frac{1}{2}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{2004}(t) dt}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{2005}'(t) dt}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2005}(x) - f_{2005}(0)}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2005} \cdot e^{3x} - 3^{2005}}{3^{2004} \cdot e^{3x}} =$
 $= \frac{3^{2005}}{3^{2004}} = 3$;
- g) $f_0(x) + f_1(x) = 4 \Leftrightarrow x = 0$